#### Was ist nichteuklidische Geometrie?

Detlef Dürr

Mathematisches Institut LMU München

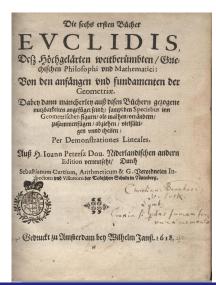
9. Mai 2009

# Euklids "Stoicheia": Die Elemente (350 v. Chr.)

Ein Fragment einer frühen Abschrift



#### Euklids Elemente im 17. Jahrhundert



Das Verstehen des Raumes durch primitive Größen: *Elemente* Das sind Punkt, Gerade, , Kreis und Winkel (Strahl)

Von den anfängen und

fundamenten der Geometria,

#### Tractiert von dem grund der rechtlinfichen

figurn/ihren Linien/Bincfeln und andern fachen/fampt Dem fundament vom machen oder geichnen/ vers åndern / und thailen derfelben.

Definitiones, das seindt beschreibunghen / Ober: Erklärunghen eilicher Namen und Wörter ber Linien/ figurn und anderer dinghen/ sin diesem Buch vorfallen und gliebzunch werden.

- I. Gin punct ift ein untheilbares bupffelein.
- 2. Gin Linea ift eine lenge ohne einige breiten.
- 3. Daß eufferfte von den linien feindt puncten.
- 4. Eine gerabeoder rechte linij/ift die fürtzefte ausstreckung von einem punct gu dem andern.
- 5. Superfitien, feindt / bie allein lenge und breitten haben.
- 6. Das eufferfte von den Superfitien feindt linien/
  7. Ein ebene Superfities, ligt gleich zwifchen ihren linien-
- S. Einebener Bindel/ift/fo gwo linien auff einem ebenen plag/
- 9. Ein rechtlinischer winctel ift ghemache von zwepen gheraben
- 10. Als eine gerade Einie/auff einer andern gheraden oder rechten fini fiehet, und machen im anriheren die windel auff bei
  - den feit gleich: fo feindt folche bede winckel/ winckelrecht.

# Euklids Grundlage der Mathematik: Definitionen, allgemeine Wahrheiten, Postulate

#### Mon den Fundamenten der Grometri.

- 27. Die Eriangel fo einen rechten windel haben / werben genane rechtwindlicht ober Orthogonij.
- 28. Annd die einen weiten windelhaben/nent man flumpffwind licht/oder obrufus, Item auch Ambligonius,
- 29. Aber mit dien Scharpffen winckeln / wirdt er genant fcharpfa winckelicht/oder oxigonius.
- 30. Ein Quidrat ift ein figur/ mit wier gleichen feiten und vier rechten windeln.
- 31. Ein langleicht Diereckriftdas/sovier rechte windel vnnd ie zwo gleiche seiten gegen ein ander über hat wiedt rechangulum, oder ein verlengte vierung/ auch ein parallelogram abenant.
- 31. Eine schräge wierung / hat wol vier gleiche feiten / aber feinen rechten winefel/ wirdt darumb R hombus geheiffen.
- 33. Ein schräge verlengte vierung / hat ie zwo feiten und windel gegen ein ander über gleich/vnnd darom Rhomboides abenant.
- 34. Alle andere ungeschiebte vierungen/ausser ben erzeiten/werben ungleiche vierungen/Irregulari Quadrilatera, ober Trabetia abenone.
- 35. Paralell timen/feindic / fo auffeinem ebenen plats neben ein andertigen / dergefalte : de fie zu beiden freien feben eine erftreckt / wurden fie doch nimmermehr zufammen bemmen fondern allzeit gleich weit von einander beide.
- 36. Ein Paralellogram, ist eine figur/mit vier geraden oder rechte ten linien beschlossen / von welchen ie zwo gegen ein ander nier Pararell, oder gleich weit von ein ander sein.
  - Folghen etliche andere fruct/fo auch zu diefer funft ghehoren.
- 2. Auffeinem ebenen plats/mag von einem punt zu den andern eine rechte oder gerade linea ghezogen werden.

#### Das erfte Buch Euclibie

2. So man ju gleichen dingen gleiche hin ju thut/werde die gus fammen gefügeten auch gleich fein.

ovon gleichen dingen/gleiche genommen werden / bleiben biereft auch gleich.

. Go ungleichen bingen gleiche zugethan werden/merden auch bie zufammen gefügete ungleich fein.

Go von ungleichen dingen/gleiche abgenommen werden / die reft werden auch ungleich bleiben .

6. So ainiges dinge/ jedes zweymael fo groß ift/als ein anders/, die felben feindt ein ander gleich.

. Queb fo ainiges ding jedes der halbibeil eines andern iff/die feindt ein ander gleich.

. Onter welchen dingen eines das ander nicht vbertreift/ die feinde gleich.

9. Das gantze ift allzeit groffer dann fein theil.

10. Alle rechte winckel feindt ein ander gleich.

11. So ein gerade lint/durch zwo andere gerade linien ghezogen wirdt/und die zween inwendige winkelt auff einer feiten zusammen fleiner feit als zween rechte windelt modben folche zwo linien ander felben feiten alfo verlengert wer-

Den/das fie endtlich in einem punct gufammen fommen 32. Zwo gerade ober reefte linien/ befehlieffen keinen plag oder flaur.

Folge



### Darauf folgen Propositionen:

Aussage, deren Wahrheit nicht offenbar ist und deswegen unter Zuhilfenahme der allgemeinen Wahrheiten zu beweisen ist

Seit Archimedes nennen wir die allgemeinen Wahrheiten und Postulate Axiome

Die heutige Mathematik hat Euklids Elemente als Vorbild

Darauf folgen Propositionen:

Aussage, deren Wahrheit nicht offenbar ist und deswegen unter Zuhilfenahme der allgemeinen Wahrheiten zu beweisen ist

Seit Archimedes nennen wir die allgemeinen Wahrheiten und Postulate Axiome

Die heutige Mathematik hat Euklids Elemente als Vorbild



#### Darauf folgen Propositionen:

Aussage, deren Wahrheit nicht offenbar ist und deswegen unter Zuhilfenahme der allgemeinen Wahrheiten zu beweisen ist

Seit Archimedes nennen wir die allgemeinen Wahrheiten und Postulate Axiome

Die heutige Mathematik hat Euklids Elemente als Vorbild

"Definition" der Elemente, z.B. Punkt: "ein unteilbares Düpffelein"

Klügel, von dem noch zu sprechen sein wird, schreibt 1763
Es gibt wenige Wahrheiten, die ohne Hilfe des Theorems von den
Parallelen in der Geometrie bewiesen werden können, umso weniger gibt
es, die nötig sein können, um jenes zu beweisen. Hinzu kommt, dass
solange wir keine genauen Begriffe von geraden und gekrümmten Linien
haben, aus deren Definitionen die Sachlage nicht entwickelt werden kann.
Diese nämlich sind aufgrund ihrer Gegenstände immer ziemlich finster.

"Definition" der Elemente, z.B. Punkt: "ein unteilbares Düpffelein"

Klügel, von dem noch zu sprechen sein wird, schreibt 1763
Es gibt wenige Wahrheiten, die ohne Hilfe des Theorems von den
Parallelen in der Geometrie bewiesen werden können, umso weniger gibt
es, die nötig sein können, um jenes zu beweisen. Hinzu kommt, dass
solange wir keine genauen Begriffe von geraden und gekrümmten Linien
haben, aus deren Definitionen die Sachlage nicht entwickelt werden kann.
Diese nämlich sind aufgrund ihrer Gegenstände immer ziemlich finster.

"Definition" der Elemente, z.B. Punkt: "ein unteilbares Düpffelein"

Klügel, von dem noch zu sprechen sein wird, schreibt 1763

Es gibt wenige Wahrheiten, die ohne Hilfe des Theorems von den Parallelen in der Geometrie bewiesen werden können, umso weniger gibt es, die nötig sein können, um jenes zu beweisen. Hinzu kommt, dass solange wir keine genauen Begriffe von geraden und gekrümmten Linien haben, aus deren Definitionen die Sachlage nicht entwickelt werden kann. Diese nämlich sind aufgrund ihrer Gegenstände immer ziemlich finster.

"Definition" der Elemente, z.B. Punkt: "ein unteilbares Düpffelein"

Klügel, von dem noch zu sprechen sein wird, schreibt 1763
Es gibt wenige Wahrheiten, die ohne Hilfe des Theorems von den
Parallelen in der Geometrie bewiesen werden können, umso weniger gibt
es, die nötig sein können, um jenes zu beweisen. Hinzu kommt, dass
solange wir keine genauen Begriffe von geraden und gekrümmten Linien
haben, aus deren Definitionen die Sachlage nicht entwickelt werden kann.
Diese nämlich sind aufgrund ihrer Gegenstände immer ziemlich finster.

#### Klügel weiter

Man wird jedoch nicht der Geometrie einen Schandfleck anbringen können, wenn sie in ihren Grundsätzen eine Proposition aufstellt, deren Wahrheit nicht aus genau ausgedrückten Überlegungen, sondern aus dem klaren Begriff, den wir von der geraden Linie haben, ganz sicher durchschaut wird. Ein solches ist Axiom 11 von Euklid, dass Linien, auf die eine schneidende Gerade innere und auf den selben Seiten liegende Winkel herstellt, die kleiner als zwei Rechte sind, wenn man sie ins Unendliche fortführt, auf derjenigen Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die kleiner als zwei Rechte sind. Die meisten Anhänger der Strenge im Beweisen warfen es aus der Reihe der Axiome hinaus, aber die Beweise, mit denen sie es versuchten glaubhaft zu machen, entbehren dem Fehler keineswegs.

#### Was hat es mit dem Parallelen-Postulat auf sich?

Wir betrachten die Geometrie zunächst ohne Parallele. Das ist eine arme (die absolute) Geometrie, in der es keinen Strahlensatz gibt und keinen Satz des Pythagoras und keine Dreieckskachelung der Ebene Wir benutzen der Klarheit wegen die Axiomatik Hilberts aus dem 20. Jahrhundert

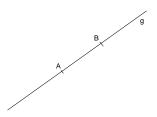
#### Was hat es mit dem Parallelen-Postulat auf sich?

Wir betrachten die Geometrie zunächst ohne Parallele. Das ist eine arme (die absolute) Geometrie, in der es keinen Strahlensatz gibt und keinen Satz des Pythagoras und keine Dreieckskachelung der Ebene Wir benutzen der Klarheit wegen die Axiomatik Hilberts aus dem 20.

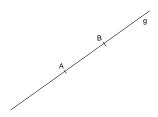
#### Was hat es mit dem Parallelen-Postulat auf sich?

Wir betrachten die Geometrie zunächst ohne Parallele. Das ist eine arme (die absolute) Geometrie, in der es keinen Strahlensatz gibt und keinen Satz des Pythagoras und keine Dreieckskachelung der Ebene Wir benutzen der Klarheit wegen die Axiomatik Hilberts aus dem 20. Jahrhundert

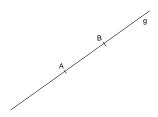
V1. Sei g eine Gerade. Dann gibt es Punkte A, B die auf der Geraden liegen



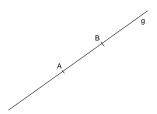
V1. Sei g eine Gerade. Dann gibt es Punkte A,B die auf der Geraden liegen



V1. Sei g eine Gerade. Dann gibt es Punkte A,B die auf der Geraden liegen

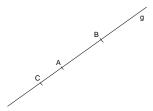


V1. Sei g eine Gerade. Dann gibt es Punkte A,B die auf der Geraden liegen



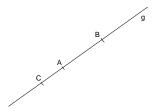
#### Axiome der Anordnung: Beispiel

A1. Sei g eine Gerade und A, B, C Punkte auf der Geraden. Dann liegt ein Punkt z.B. A zwischen den anderen zwei, z.B. B und C



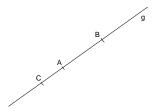
#### Axiome der Anordnung: Beispiel

A1. Sei g eine Gerade und A, B, C Punkte auf der Geraden. Dann liegt ein Punkt z.B. A zwischen den anderen zwei, z.B. B und C



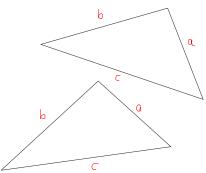
#### Axiome der Anordnung: Beispiel

A1. Sei g eine Gerade und A, B, C Punkte auf der Geraden. Dann liegt ein Punkt z.B. A zwischen den anderen zwei, z.B. B und C



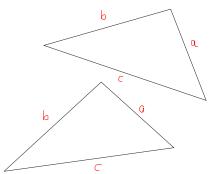
# Axiome der Kongruenz: Beispiel

K1. Dreiecke mit gleichen Seiten sind kongruent



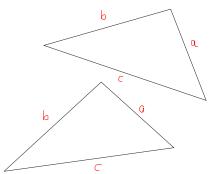
#### Axiome der Kongruenz: Beispiel

#### K1. Dreiecke mit gleichen Seiten sind kongruent

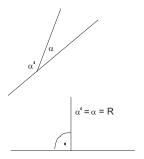


#### Axiome der Kongruenz: Beispiel

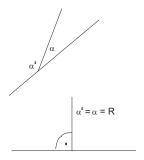
#### K1. Dreiecke mit gleichen Seiten sind kongruent



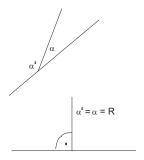
Winkel, Nebenwinkel und rechter Winkel



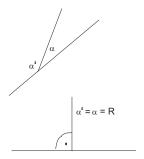
Winkel, Nebenwinkel und rechter Winkel



Winkel, Nebenwinkel und rechter Winkel

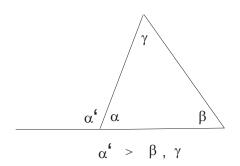


Winkel, Nebenwinkel und rechter Winkel



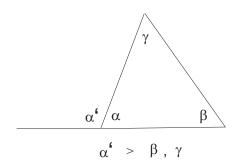
# Satz (Proposition)

Bei einem Dreieck ist jeder Außenwinkel größer als jeder gegenüberliegende Innenwinkel



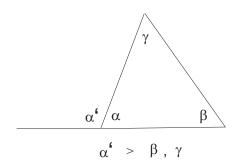
### Satz (Proposition)

Bei einem Dreieck ist jeder Außenwinkel größer als jeder gegenüberliegende Innenwinkel

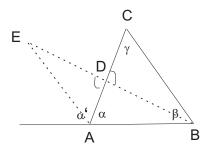


### Satz (Proposition)

Bei einem Dreieck ist jeder Außenwinkel größer als jeder gegenüberliegende Innenwinkel



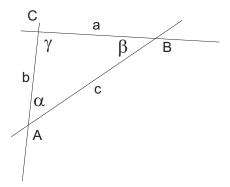
#### Beweis: Eine Hilfslinie



Dreiecke ADE und BDC sind kongruent da AD=DC und BD=DE und D-Winkel gleich. Daher ist Winkel EAD=  $\gamma$ . Der ist offenbar  $< \alpha'$ .

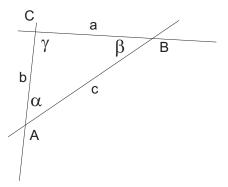
#### Satz

In einem Dreieck liegt gegenüber dem größeren Winkel die größere Seite



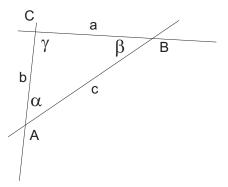
#### Satz

In einem Dreieck liegt gegenüber dem größeren Winkel die größere Seite

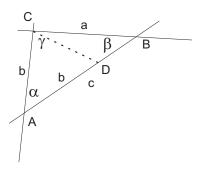


#### Satz

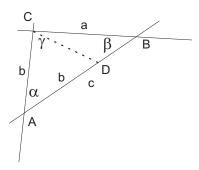
In einem Dreieck liegt gegenüber dem größeren Winkel die größere Seite



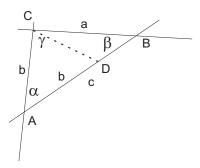
Sei ohne Einschränkung c>b, wir wollen schließen, dass  $\gamma>\beta$  ist. Trage b auf c ab. Winkel ADC ist Aussenwinkel an Dreieck CDB, und nach vorherigem Satz ist der Winkel größer als  $\beta$ . Offenbar ist aber  $\gamma>$  Winkel ACD und Winkel ACD und Winkel ADC sind Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks und damit gleich



Sei ohne Einschränkung c>b, wir wollen schließen, dass  $\gamma>\beta$  ist. Trage b auf c ab. Winkel ADC ist Aussenwinkel an Dreieck CDB, und nach vorherigem Satz ist der Winkel größer als  $\beta$ . Offenbar ist aber  $\gamma>$  Winkel ACD und Winkel ACD und Winkel ADC sind Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks und damit gleich

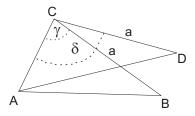


Sei ohne Einschränkung c>b, wir wollen schließen, dass  $\gamma>\beta$  ist. Trage b auf c ab. Winkel ADC ist Aussenwinkel an Dreieck CDB, und nach vorherigem Satz ist der Winkel größer als  $\beta$ . Offenbar ist aber  $\gamma>$  Winkel ACD und Winkel ACD und Winkel ADC sind Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks und damit gleich



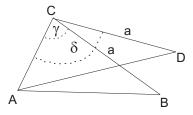
#### Satz

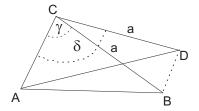
Konstruiere mit dem Winkel  $\delta>\gamma$  die Linie  $C\!D$  wie in der Figur. Dann gilt  $\overline{AD}>\overline{AB}$ 



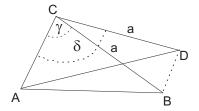
#### Satz

Konstruiere mit dem Winkel  $\delta>\gamma$  die Linie  $C\!D$  wie in der Figur. Dann gilt  $\overline{AD}>\overline{AB}$ 

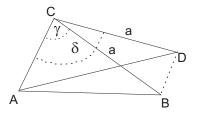




Am Dreieck *ABD* sehen wir, dass Winkel *ADB* < Winkel *ABD*, denn Winkel *ABD* wird durch Winkel *CBD* geteilt, wohingegen Winkel *ADB* den Winkel *CDB* teilt. Aber die Winkel *CBD* und *CDB* sind als Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks *CBD* gleich. Nach vorherigem Satz liegt gegenüber dem größeren Winkel die größere Seite.



Am Dreieck *ABD* sehen wir, dass Winkel *ADB* < Winkel *ABD*, denn Winkel *ABD* wird durch Winkel *CBD* geteilt, wohingegen Winkel *ADB* den Winkel *CDB* teilt. Aber die Winkel *CBD* und *CDB* sind als Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks *CBD* gleich. Nach vorherigem Satz liegt gegenüber dem größeren Winkel die größere Seite.



Am Dreieck *ABD* sehen wir, dass Winkel *ADB* < Winkel *ABD*, denn Winkel *ABD* wird durch Winkel *CBD* geteilt, wohingegen Winkel *ADB* den Winkel *CDB* teilt. Aber die Winkel *CBD* und *CDB* sind als Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks *CBD* gleich. Nach vorherigem Satz liegt gegenüber dem größeren Winkel die größere Seite.

#### Satz

Dreiecksungleichung: Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist länger als die dritte Seite.

Beweis: direkte Anwendung des vorherigen Satzes für  $\delta=2R$ 

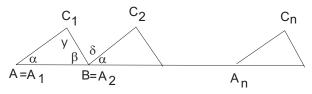
#### Satz

Dreiecksungleichung: Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist länger als die dritte Seite.

Beweis: direkte Anwendung des vorherigen Satzes für  $\delta=2R$ 

Satz Die Summe der Winkel im Dreieck ist immer kleiner oder gleich 2 Rechte.

#### Beweis: Winkelsumme im Dreieck < 2R



Zu zeigen:  $\alpha+\beta+\gamma\leq 2R$ . Angenommen dies gilt nicht. Dann ist  $\alpha+\beta+\gamma>2R$ . Nun ist nach Konstruktion  $\alpha+\beta+\delta=2R$ , daher ist dann  $\gamma>\delta$  und sofort wegen Dreieckssatz  $A_1A_2>C_1C_2$ . Das heißt  $\varepsilon:=A_1A_2-C_1C_2>0$ . Nun mit Dreiecksungleichung  $A_1C_n+A_nC_n\geq A_1A_n$  und ebenso  $A_1C_1+C_1C_n\geq A_1C_n$  wobei  $A_nC_n=A_1C_1$  und  $C_1C_n=nC_1C_2$ ,  $A_1A_n=nA_1A_2$  sodass  $2A_1A_2\geq n(A_1A_2-C_1C_2)=n\varepsilon$ . Nun bemüht man das Axiom von Eudoxos (auch Archimedisches Axiom genannt): Zu je zwei gleichartigen Größen A, B gibt es immer eine Zahl n sodass nA>B ist. Wähle also n groß genug, sodass der Widerspruch entsteht.

#### Die Definition der Parallele

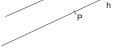
Zwei Geraden die in einer Ebene liegen heißen parallel, wenn die beiden Geraden keinen Punkt gemeinsam haben

h



#### Die Definition der Parallele

Zwei Geraden die in einer Ebene liegen heißen parallel, wenn die beiden Geraden keinen Punkt gemeinsam haben



#### Die Definition der Parallele

Zwei Geraden die in einer Ebene liegen heißen parallel, wenn die beiden Geraden keinen Punkt gemeinsam haben

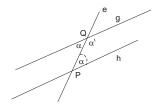


#### Die Definition der Parallele

Zwei Geraden die in einer Ebene liegen heißen parallel, wenn die beiden Geraden keinen Punkt gemeinsam haben

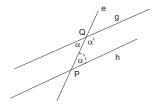


#### Satz: Parallele existieren



Beweis: per Konstruktion: Sei g eine Gerade und P ein Punkt nicht auf g. Lege eine Gerade e durch P, die g in Q schneidet. Trage einen Schnittwinkel, z.B.  $\alpha$ , in P wechselseitig an e an. Verlängere den Strahl zur Geraden h. Die so konstruierte Gerade h ist eine Parallele. Denn die Innenwinkel von e mit g und h sind g. Würden sich g und g schneiden, dann ergibt sich am Schnittpunkt g ein Winkel und es ergibt sich ein Dreieck g0 mit Summe der Innenwinkel größer g1.

#### Satz: Parallele existieren



Beweis: per Konstruktion: Sei g eine Gerade und P ein Punkt nicht auf g. Lege eine Gerade e durch P, die g in Q schneidet. Trage einen Schnittwinkel, z.B.  $\alpha$ , in P wechselseitig an e an. Verlängere den Strahl zur Geraden h. Die so konstruierte Gerade h ist eine Parallele. Denn die Innenwinkel von e mit g und h sind 2R. Würden sich g und h schneiden, dann ergibt sich am Schnittpunkt S ein Winkel und es ergibt sich ein Dreieck SPQ mit Summe der Innenwinkel größer 2R

### Die Umkehrung ist das Parallelen Postulat von Euklid

**Nochmals Klügel**: Ein solches ist Axiom 11 von Euklid, dass Linien, auf die eine schneidende Gerade innere und auf den selben Seiten liegende Winkel herstellt, die kleiner als zwei Rechte sind, wenn man sie ins Unendliche fortführt, auf derjenigen Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die kleiner als zwei Rechte sind.

# Äquivalente Formulierung

Zu Gerade g und Punkt P nicht auf g gibt es genau eine Parallele h zu g durch P

- 1. Wechselwinkel an Parallelen sind gleich
- 2. Winkelsumme im Dreieck = 2R
- 3. Strahlensatz, Satz des Pythagoras, Theorie der Proportionen, Placketierung der Ebene

- 1. Wechselwinkel an Parallelen sind gleich
- 2. Winkelsumme im Dreieck = 2R
- Strahlensatz, Satz des Pythagoras, Theorie der Proportionen, Placketierung der Ebene

- 1. Wechselwinkel an Parallelen sind gleich
- 2. Winkelsumme im Dreieck = 2R
- Strahlensatz, Satz des Pythagoras, Theorie der Proportionen, Placketierung der Ebene

- 1. Wechselwinkel an Parallelen sind gleich
- 2. Winkelsumme im Dreieck = 2R
- 3. Strahlensatz, Satz des Pythagoras, Theorie der Proportionen, Placketierung der Ebene

# Wer ist Georg Simon Klügel?



Mathematiker und Physiker, 1739 - 1812, wurde im März 1767 zum ordentlichen Professor der Mathematik in Helmstedt ernannt; Dissertation bei Kästner in Göttingen.

Musterung der vornehmlichen Versuche die Theorie der Parallelen zu beweisen

diese unterzogen einem öffentlichen Examen

A b r a h a m G o t t h e l f K a e s t n e r öffentlicher ordentlicher Professor der Mathematik und der Physik, Mitglied der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, der mathematischen Klassen der schwedischen und der preußischen Akademie der Wissenschaften, der kurfürstlichen Akademie nützlicher Wissenschaften zu Erfurt...

und der antwortende Verfasser G e o r g S i m o n K l  $\ddot{u}$  g e l aus Hamburg, Verehrer der hochheiligen Theologie

\* \* \*

am 20. August des Jahres 1763 der christlichen Ära

Auf Klügels Lehrstuhl (der ging nach Halle) folgte Johann Friedrich Pfaff heute noch in der Mathematik bekannt. Dieser promovierte Carl Friedrich Gauss in Helmstedt. Gauss erfand mit Janos Bolyai und Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski nichteuklidische Geometrie.

Was bedeutet das?

Nichteuklidische Geometrie ist die euklidische Geometrie in der das Parallelen Postulat falsch ist. Wie kann man zu so einem Denken kommen?



Auf Klügels Lehrstuhl (der ging nach Halle) folgte Johann Friedrich Pfaff, heute noch in der Mathematik bekannt. Dieser promovierte Carl Friedrich Gauss in Helmstedt. Gauss erfand mit Janos Bolyai und Nikolai

Was bedeutet das?

Nichteuklidische Geometrie ist die euklidische Geometrie in der das Parallelen Postulat falsch ist. Wie kann man zu so einem Denken kommen?



Auf Klügels Lehrstuhl (der ging nach Halle) folgte Johann Friedrich Pfaff, heute noch in der Mathematik bekannt. Dieser promovierte Carl Friedrich Gauss in Helmstedt. Gauss erfand mit Janos Bolyai und Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski nichteuklidische Geometrie.

Was bedeutet das?

Nichteuklidische Geometrie ist die euklidische Geometrie in der das Parallelen Postulat falsch ist. Wie kann man zu so einem Denken kommen?



Auf Klügels Lehrstuhl (der ging nach Halle) folgte Johann Friedrich Pfaff, heute noch in der Mathematik bekannt. Dieser promovierte Carl Friedrich Gauss in Helmstedt. Gauss erfand mit Janos Bolyai und Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski nichteuklidische Geometrie.

#### Was bedeutet das?

Nichteuklidische Geometrie ist die euklidische Geometrie in der das Parallelen Postulat falsch ist. Wie kann man zu so einem Denken kommen?



Auf Klügels Lehrstuhl (der ging nach Halle) folgte Johann Friedrich Pfaff, heute noch in der Mathematik bekannt. Dieser promovierte Carl Friedrich Gauss in Helmstedt. Gauss erfand mit Janos Bolyai und Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski nichteuklidische Geometrie.

Was bedeutet das?

Nichteuklidische Geometrie ist die euklidische Geometrie in der das Parallelen Postulat falsch ist. Wie kann man zu so einem Denken kommen?



Auf Klügels Lehrstuhl (der ging nach Halle) folgte Johann Friedrich Pfaff, heute noch in der Mathematik bekannt. Dieser promovierte Carl Friedrich Gauss in Helmstedt. Gauss erfand mit Janos Bolyai und Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski nichteuklidische Geometrie.

Was bedeutet das?

Nichteuklidische Geometrie ist die euklidische Geometrie in der das Parallelen Postulat falsch ist. Wie kann man zu so einem Denken kommen?



Dass dem Heiligen Römischen Reich, dem berühmten und freien Staat Hamburg, dem sehr bedeutenden und sehr beachteten Senat, den hocherlauchten, großartigen, herausragendsten, bedachtesten, glänzendsten und klügsten Männern, den Herren Konsuln, Staatsanwälten, Senatoren, dem Archivaren Protonotarius, den Sekretären und dem Hilfsarchivaren, den besten Vätern des Vaterlandes. den frömmsten, sorgfältigsten und verdientesten Verteidigern der Religion und der öffentlichen Freiheit, den gewichtigsten Vorstehern der Justiz und der Gleichheit, den erfolgreichsten und aufmerksamsten Beförderern der Wissenschaft und zugleich des Handels, den nachsichtsvollsten Herren Schutzherren und Mäzenaten diese wie auch immer gearteten Anfänge ihrer Studien - auf dass es bei aller Verehrung der Frömmigkeit und der Hochachtung angemessen ist - heilig sind, wünscht und übergibt zugleich sich und seine Musen der Schutzherrschaft so großer Männer der demütigste Verehrer so vieler sehr bedeutender Namen, der Verfasser.

# Diese Worte sind dem guten Ton der Zeit zuzuordnen

# Aber die Einsicht die zu einem tieferen Verständnis der Geometrie und unserer Welt geführt findet man in folgenden Worten

Hinzu kommt, dass solange wir keine genauen Begriffe von geraden und gekrümmten Linien haben, aus deren Definitionen die Sachlage nicht entwickelt werden kann. Diese nämlich sind aufgrund ihrer Gegenstände immer ziemlich finster.

Was bedeutet das? Wie kann der Begriff einer Geraden dunkel sein? Die Elemente sind durch ihre Axiome definiert! Und was bedeutet das nun wieder?



Aber die Einsicht die zu einem tieferen Verständnis der Geometrie und unserer Welt geführt findet man in folgenden Worten

Hinzu kommt, dass solange wir keine genauen Begriffe von geraden und gekrümmten Linien haben, aus deren Definitionen die Sachlage nicht entwickelt werden kann. Diese nämlich sind aufgrund ihrer Gegenstände immer ziemlich finster.

Was bedeutet das? Wie kann der Begriff einer Geraden dunkel sein? Die Elemente sind durch ihre Axiome definiert! Und was bedeutet das nun wieder?



Aber die Einsicht die zu einem tieferen Verständnis der Geometrie und unserer Welt geführt findet man in folgenden Worten

Hinzu kommt, dass solange wir keine genauen Begriffe von geraden und gekrümmten Linien haben, aus deren Definitionen die Sachlage nicht entwickelt werden kann. Diese nämlich sind aufgrund ihrer Gegenstände immer ziemlich finster.

Was bedeutet das? Wie kann der Begriff einer Geraden dunkel sein?

Die Elemente sind durch ihre Axiome definiert! Und was bedeutet das nun wieder?



Aber die Einsicht die zu einem tieferen Verständnis der Geometrie und unserer Welt geführt findet man in folgenden Worten

Hinzu kommt, dass solange wir keine genauen Begriffe von geraden und gekrümmten Linien haben, aus deren Definitionen die Sachlage nicht entwickelt werden kann. Diese nämlich sind aufgrund ihrer Gegenstände immer ziemlich finster.

Was bedeutet das? Wie kann der Begriff einer Geraden dunkel sein? Die Elemente sind durch ihre Axiome definiert!

Und was bedeutet das nun wieder?



Aber die Einsicht die zu einem tieferen Verständnis der Geometrie und unserer Welt geführt findet man in folgenden Worten

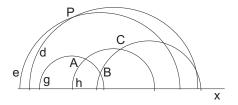
Hinzu kommt, dass solange wir keine genauen Begriffe von geraden und gekrümmten Linien haben, aus deren Definitionen die Sachlage nicht entwickelt werden kann. Diese nämlich sind aufgrund ihrer Gegenstände immer ziemlich finster.

Was bedeutet das? Wie kann der Begriff einer Geraden dunkel sein? Die Elemente sind durch ihre Axiome definiert! Und was bedeutet das nun wieder?



### Geraden können Halbkreise sein: Poincarésche Halbebene

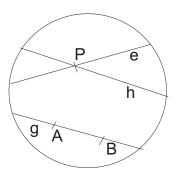
Die erfüllen (recht offenbar) die Axiome der absoluten Geometrie



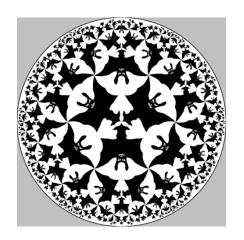
Die Ebene ist die obere Halbebene. Geraden sind Halbkreise mit Mittelpunkt auf der x-Achse. Punkte sind Punkte. Die Entfernung zwischen zwei Punkten wird durch eine "Metrik" bestimmt, derart dass die Geraden unendlich lang sind. Diese "Geraden" erfüllen alle Axiome, aber nicht das Parallelen Postulat. Die Geraden e und e sind gehen durch e und sind parallel zu e e e e ist ein nichteuklidisches Dreieck.

# Hyperbolische Geometrie

Dies ist ein Beispiel einer hyperbolischen Geometrie. Die Kleinsche Ebene ist damit sehr verwandt.



# Kongruenzen in der Kleinschen Ebene nach Maurits Cornelis Escher



Sphärische Geometrie ist kein Beispiel der hier betrachteten Geometrien. Auf einer Kugelfläche sind die Geraden Großkreise und Punkt ist das Paar Punkt und Gegenpunkt. Die Anordnung von Punkten gibt es darum nicht mehr und die Winkelsumme im Dreieck kann größer als 2R sein.

Wie Klügel voraussah: Diese Frage kann erst geklärt werden, wenn Licht in das Dunkel der Elemente gebracht wird. Was genau meinen wir mit Gerade, Punkt, Ebene? Sind Geraden gerade Linien wie bei Euklid oder Halbkreise wie in der Hyperbolischen Geometrie? In der Euklidischen Geometrie ist das Parallelen Postulat wahr, in der Hyperbolischen Geometrie ist es falsch.

Ist unsere Welt euklidisch? Nach Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie nicht!



Wie Klügel voraussah: Diese Frage kann erst geklärt werden, wenn Licht in das Dunkel der Elemente gebracht wird. Was genau meinen wir mit Gerade, Punkt, Ebene? Sind Geraden gerade Linien wie bei Euklid oder Halbkreise wie in der Hyperbolischen Geometrie? In der Euklidischen Geometrie ist das Parallelen Postulat wahr, in der Hyperbolischen Geometrie ist es falsch.

Ist unsere Welt euklidisch? Nach Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie nicht!

Wie Klügel voraussah: Diese Frage kann erst geklärt werden, wenn Licht in das Dunkel der Elemente gebracht wird. Was genau meinen wir mit Gerade, Punkt, Ebene? Sind Geraden gerade Linien wie bei Euklid oder Halbkreise wie in der Hyperbolischen Geometrie? In der Euklidischen Geometrie ist das Parallelen Postulat wahr, in der Hyperbolischen Geometrie ist es falsch.

Ist unsere Welt euklidisch? Nach Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie nicht!

Wie Klügel voraussah: Diese Frage kann erst geklärt werden, wenn Licht in das Dunkel der Elemente gebracht wird. Was genau meinen wir mit Gerade, Punkt, Ebene? Sind Geraden gerade Linien wie bei Euklid oder Halbkreise wie in der Hyperbolischen Geometrie? In der Euklidischen Geometrie ist das Parallelen Postulat wahr, in der Hyperbolischen Geometrie ist es falsch.

Ist unsere Welt euklidisch? Nach Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie nicht!